

Lenka RANDÝSKOVÁ¹, Petr JANAS²

NELINEÁRNÍ ŘEŠENÍ OCELOVÉ OBLOUKOVÉ VÝZTUŽE PŘI EXISTENCI PASIVNÍCH SIL

NON-LINEAR SOLUTION OF STEEL ARC REINFORCEMENT WITH INFLUENCE OF PASSIVE FORCES

Abstrakt

Článek se zabývá geometricky a fyzikálně nelineárním řešením ocelové obloukové výztuže. Při řešení se počítá s interakcí výztuže a okolní horniny. Je použit Winklerův jedno-parametrický model. Základem celého řešení je obecná deformační metoda a iterační postup výpočtu. Odvozený postup byl podkladem pro sestavení softwaru v prostředí Microsoft Excel a Visual Basic, který byl následně použit k řešení příkladu.

Klíčová slova

Nelineární řešení, oblouková výztuž, Winklerův model, obecná deformační metoda.

Abstract

Geometrically and physically non-linear solution of steel arc reinforcement with influence of passive forces is presented in this paper. The Winkler model is used to the solution. It is an elastic one-parametrical model, which is characterized by the only one constant C . A displacement method is utilized along with an iterative procedure. The software was created, which is based on derived procedure. An example was solved consequently.

Keywords

Non-linear solution, arc reinforcement, Winkler model, displacement method.

1 ÚVOD

Ocelová výztuž tvořená kruhovými oblouky je významným vyztužujícím prvkem v hornictví a často i v podzemním stavitelství. Na rozdíl od pozemního stavitelství jsou zde deformační projevy mnohdy značné, takže při statickém posouzení této výztuže by se měla respektovat geometrická i fyzikální nelinearita.

Zatížení ocelové výztuže dlouhých důlních děl může být v zásadě aktivní nebo pasivní. Aktivní zatížení je vyvoláno zejména tíhou rozvolněné horniny, které působí na výztuž ve svislém i v horizontálním směru. Může být vyvoláno též tíhou technologického zařízení či rázovým zatížením při vzniku důlního otřesu. Dále v dlouhých důlních dílech může být vyvoláno aktivní deformační zatížení deformujícím se horninovým masivem.

Aktivním zatížením se ocelová oblouková výztuž deformuje a v případě, že má kontakt s horninou a deformace výztuže má směr "do horniny", dochází k silovému působení horniny na výztuž, jež je vyvoláno deformující se výztuží. Takto indukovaným silám říkáme pasivní síly

¹ Ing. Lenka Randýsková, Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Poděště 1875/17, 708 33 Ostrava - Poruba, tel.: (+420)597321919, e-mail: lenka.randyskova@vsb.cz.

² Doc. Ing. Petr Janas, CSc., Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Poděště 1875/17, 708 33 Ostrava - Poruba, tel.: (+420)597321308, e-mail: petr.janas@vsb.cz.

a zatížení pak pasivní zatížení. Pasivní zatížení je tedy deformační zatížení vyvolané aktivním zatížením ocelové obloukové výztuže.

Pasivní síly mají velmi příznivý vliv na únosnost i na deformaci ocelové výztuže. Stabilizují ji tím, že vyvolávají ve výztuži podstatně příznivější hodnoty složek vnitřních sil než samotné aktivní zatížení [1].

2 ŘEŠENÍ

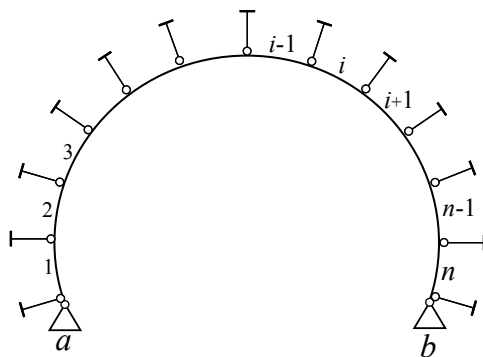
Předpokládejme, že výztuž je aktivně zatížena. Důsledkem tohoto zatížení se výztuž bude deformovat a v případě kontaktu s horninou a směru deformace výztuže "do horniny" budou vznikat pasivní síly. Obě zde uvedené podmínky, tj. kontakt s horninou a směr deformace, jsou nutné, mají-li pasivní síly vzniknout.

Předpokládejme nejprve, že pasivní síly budou vznikat po celém obvodu výztuže. Celou délku oblouku rozdělíme na n dílků o délce ds_i . Předpokládejme dále, že v každém vzniklém styčniku působí pasivní síla kolmo na střednici oblouku. Každá pasivní síla představuje další jednoduchou vazbu, jakýsi pružný poddajný kyvný prut. (Pozn. Při řešení je použit nejstarší a nejjednodušší model interakce s okolním prostředím – Winklerův model. Tento základní model patří mezi tzv. jedno-parametrické modely s lineární odezvou na zatížení, protože pro jeho popis stačí pouze jedna konstanta, koeficient stlačitelnosti podloží C .)

Celkem tedy obdržíme n přímkových dílků, které tvoří oblouk a $n+1$ kyvných prutů, které ekvivalentně nahrazují vznikající pasivní síly (obr. 1). Tímto rozdělením vznikne celkem n_p neznámých parametrů vektoru deformace $\{r\}$. Tyto neznámé deformace lze získat pomocí obecné deformační metody [2] řešením soustavy rovnic

$$[K] \cdot \{r\} = \{F\}, \quad (1)$$

kde $[K]$ je celková matice tuhosti a $\{F\}$ zatěžovací vektor soustavy.



Obr. 1: Schéma oblouku při existenci pasivních sil

V průběhu zatěžování se materiál nechová po překročení meze únosnosti lineárně, chová se fyzikálně nelineárně. Může se měnit i tvar profilu uvedeného na obr. 6. Důsledkem je změna ohybové tuhosti profilu, která je funkcí vnitřních sil (ohybového momentu M a normálových sil N). Hodnotu ohybové tuhosti při daných složkách vnitřních sil považujeme za lineární (ekvivalentní ohybová tuhost). Pro možnost jejího jednoznačného vyjádření je vhodné ji definovat jako funkci relativního pootočení a normálové síly [5], viz obr. 2.

2.1 Matice tuhosti soustavy K

Celkovou matici tuhosti $[K]$ získáme lokalizací globálních matic tuhostí jednotlivých dílků oblouku a matic tuhostí kyvných prutů simulujících pasivní síly. Matice $[K]$ je při nelineárním řešení funkcí zatěžovacího vektoru $\{F\}$.

Globální matice tuhosti $\{k_i\}$ jednotlivých přímkových dílků, které tvoří obloukovou výztuž, získáme pomocí vztahů (2), (3) a (4). [3]

$$[k_i^*] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{ds_i} & 0 & 0 & -\frac{EA}{ds_i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_i}{ds_i^3} & -\frac{6EI_i}{ds_i^2} & 0 & -\frac{12EI_i}{ds_i^3} & \frac{6EI_i}{ds_i^2} \\ 0 & -\frac{6EI_i}{ds_i^2} & \frac{4EI_i}{ds_i} & 0 & \frac{6EI_i}{ds_i^2} & \frac{2EI_i}{ds_i} \\ -\frac{EA}{ds_i} & 0 & 0 & \frac{EA}{ds_i} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_i}{ds_i^3} & \frac{6EI_i}{ds_i^2} & 0 & \frac{12EI_i}{ds_i^3} & -\frac{6EI_i}{ds_i^2} \\ 0 & \frac{6EI_i}{ds_i^2} & -\frac{2EI_i}{ds_i} & 0 & -\frac{6EI_i}{ds_i^2} & \frac{4EI_i}{ds_i} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$[T_i] = \begin{bmatrix} \cos\psi_i & \sin\psi_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\psi_i & \cos\psi_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\psi_i & \sin\psi_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\psi_i & \cos\psi_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$[k_i] = [T_i]^T \cdot [k_i^*] \cdot [T_i] \quad (4)$$

V těchto vztazích je ds_i délka jednotlivých dílků oblouku, ψ_i je úhel natočení i -tého dílku. EI_i je hodnota ekvivalentní ohybové tuhosti dílku, které se v průběhu výpočtu získává lineární interpolací v závislosti na relativním natočení $d\varphi_i$ dílku a hodnotě normálové síly N_i z křivek na obr. 2 [4].

$$d\varphi_i = \left| \frac{1}{ds_i} (\varphi_i - \varphi_{i-1}) \right| \quad (5)$$

$$\{R_i^*\} = [T_i] \cdot [k_i] \cdot \{r_i\} \quad (6)$$

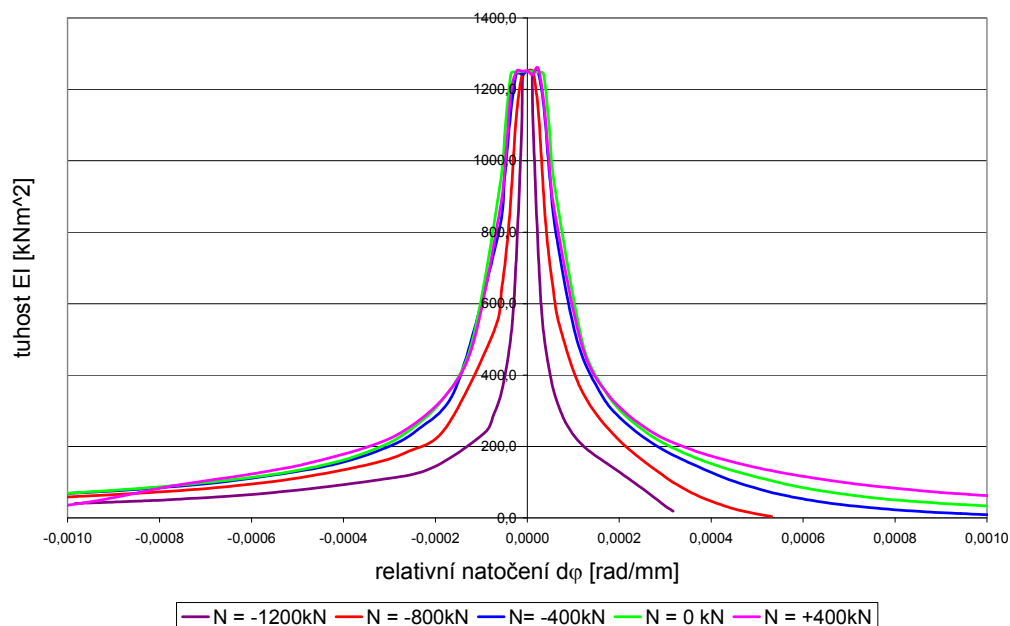
$$N_i = -R_{i,1}^* = R_{i,4}^* \quad (7)$$

$\{r_i\}$ – globální vektor deformací pro i -tý dílek

$\{R_i^*\}$ – lokální vektor koncových sil pro i -tý dílek

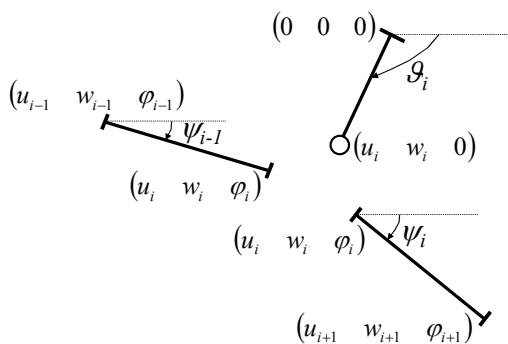
$$\begin{aligned} d\varphi_i \geq d\varphi_{m,j-1} \cap d\varphi_i < d\varphi_{m,j} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{EI}_{m,i} = EI_{m,j-1} - \frac{(d\varphi_i - d\varphi_{m,j-1})}{(d\varphi_{m,j} - d\varphi_{m,j-1})} (EI_{m,j-1} - EI_{m,j}) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} N_i \geq N_m \cap N_i < N_{m+1} &\Rightarrow \\ \Rightarrow EI_i = \tilde{EI}_{m,i} - \frac{(N_i - N_m)}{(N_{m+1} - N_m)} (\tilde{EI}_{m,i} - \tilde{EI}_{m+1,i}) \end{aligned} \quad (9)$$



Obr. 2: Křivky ekvivalentních ohybových tuhostí EI pro profil P-28

Globální matice tuhosti $\{k_i\}$ kyvných prutů, které ekvivalentně nahrazují pasivní síly, získáme pomocí následujících vztahů. U těchto kyvných prutů volíme délku $l = 1$. Plocha je dána násobkem šířky profilu b (pro použitý profil P-28 je $b = 150$ mm) a součtu polovin délek ds dvou přiléhajících dílků oblouku. Modul pružnosti E je určen hodnotou koeficientu stlačitelnosti C .



Obr. 3: Detail prutů v i -tém styčnicku včetně naznačení příslušných deformací

$$[k_i^*] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{podl,i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$K_{podl,i} = \frac{EA}{l} = \frac{C \cdot b \cdot \left(\frac{\Delta s_{i-1} + \Delta s_i}{2} \right)}{1} = C \cdot b \cdot \left(\frac{\Delta s_{i-1} + \Delta s_i}{2} \right) \quad (11)$$

$$\vartheta_i = \frac{\psi_{i-1} + \psi_i}{2} + \frac{\pi}{2} \quad (12)$$

$$[T_i] = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_i & \sin \vartheta_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \vartheta_i & \cos \vartheta_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \vartheta_i & \sin \vartheta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \vartheta_i & \cos \vartheta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$[k_i] = [T_i]^T \cdot [k_i^*] \cdot [T_i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{podl,i} \cdot \cos^2 \vartheta_i & K_{podl,i} \cdot \sin \vartheta_i \cdot \cos \vartheta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{podl,i} \cdot \sin \vartheta_i \cdot \cos \vartheta_i & K_{podl,i} \cdot \sin^2 \vartheta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

2.2 Postup výpočtu

Vektor $\{r\}$ nelze při velkých deformacích, kdy při jejich nárůstu dochází k poklesu velikosti zatížení, získat explicitně řešením (1). Lze ale postupovat tak, že volíme deformaci vhodného bodu konstrukce a hledáme odpovídající hodnotu zatížení a zbývající hodnoty deformací. Ziskáváme tedy smíšenou úlohu popsanou následujícími rovnicemi.

$$[K] \cdot \{r\} = q \cdot \{\overline{F}\} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1s} & \dots & k_{1n_p} \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ k_{s1} & & k_{ss} & & k_{sn_p} \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ k_{n_p1} & \dots & k_{n_ps} & \dots & k_{n_p n_p} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ w_s \\ \vdots \\ d_{n_p} \end{bmatrix} = q \cdot \begin{bmatrix} \overline{F}_1 \\ \vdots \\ \overline{F}_s \\ \vdots \\ \overline{F}_{n_p} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \dots & \overline{F}_1 & \dots & k_{1n_p} \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ k_{s1} & & \overline{F}_s & & k_{sn_p} \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ k_{n_p1} & \dots & \overline{F}_{n_p} & \dots & k_{n_p n_p} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ -q \\ \vdots \\ d_{n_p} \end{bmatrix} = -w_s \cdot \begin{bmatrix} k_{1s} \\ \vdots \\ k_{ss} \\ \vdots \\ k_{n_ps} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$[K_{\overline{F}}] \cdot \{r_q\} = -w_s \cdot \{K_s\} \quad (18)$$

$$\{r_q\} = [K_{\overline{F}}]^{-1} \cdot (-w_s) \cdot \{K_s\} \quad (19)$$

$\{\overline{F}\}$ - zatěžovací vektor vyvolaný jednotkovým zatížením $q = 1$

$\{K_s\}$ - vektor obsahující prvky s -tého sloupce původní matice $[K]$

$[K_{\overline{F}}]$ - modifikovaná matice tuhosti, s -tý sloupec je nahrazen vektorem $\{\overline{F}\}$

$\{r_q\}$ - modifikovaný vektor deformací, hodnota w_s nahrazena zápornou hodnotou q

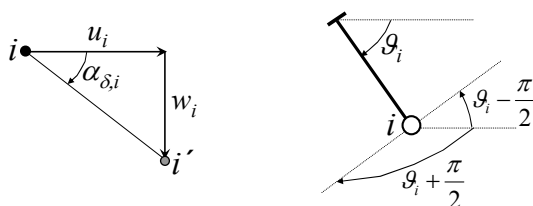
Výpočet pro danou deformaci probíhá iteračně, dokud neobdržíme požadovanou přesnost ε , která je dána hodnotami zatížení ve dvou následujících k -tých iteracích.

$$\varepsilon = \left| \frac{(q_k - q_{k-1})}{q_k} \right| \quad (20)$$

V každém iteračním kroku neustále přepočítáváme prvky matice tuhosti $[K]$. Nové hodnoty jsou závislé nejen na změně geometrie konstrukce, ale i na změně ohybové tuhosti jednotlivých dílků EI . Zároveň v každém iteračním kroku kontrolujeme, zda v kyvných prutech, které nahrazují pasivní síly, nevzniká tah. Tažené kyvné pruty jsou při tvorbě matice tuhosti $[K]$ vynechány, neboť na kontaktech s výztuží nemohou zpravidla tahové síly vznikat. Zda tah vzniká, lze zjistit porovnáním

směrového úhlu kyvného prutu ϑ_i a směru deformace $\alpha_{\delta,i}$ v daném i -tém styčnicku. Směr deformace výztuže při splnění podmínky (21) není "do horniny", výztuž nemá v takovém případě kontakt s horninou a nevznikají v daném místě i pasivní síly.

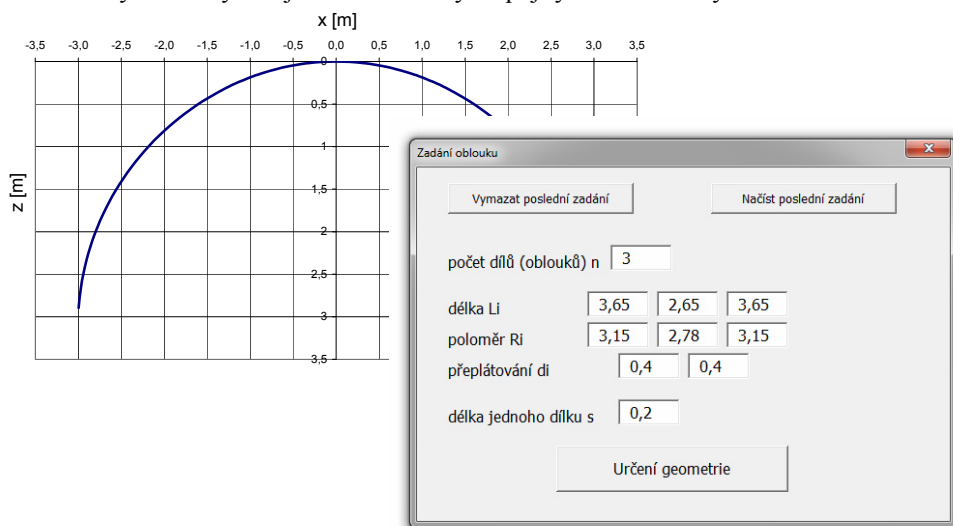
$$\vartheta_i - \frac{\pi}{2} < \alpha_{\delta,i} < \vartheta_i + \frac{\pi}{2} \quad (21)$$



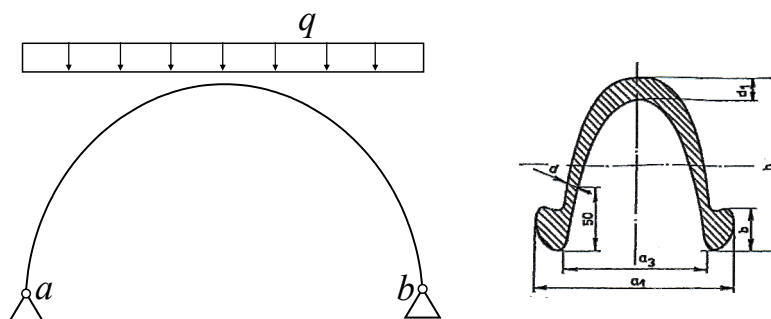
Obr. 4: Grafické vysvětlivky ke vzorci (21)

3 PŘÍKLAD

Popsaným postupem byla při aplikaci vytvořeného softwaru řešena výztuž 00-0-16/P28. Tato výztuž je tvořena třemi ocelovými oblouky, které jsou vzájemně přeplátovány. Rozměry jednotlivých oblouků a délky přeplátování jsou uvedeny v zadávacím formuláři na obr. 5. Tvorba geometrie byla převzata z [1], kapitola 2.1. Je zadána hodnota stlačitelnost okolního prostředí $C = 36 \text{ MPa/m}^3$ po celém obvodu výztuže. Výztuž je zatížena svislým spojitým rovnoměrným zatížením.

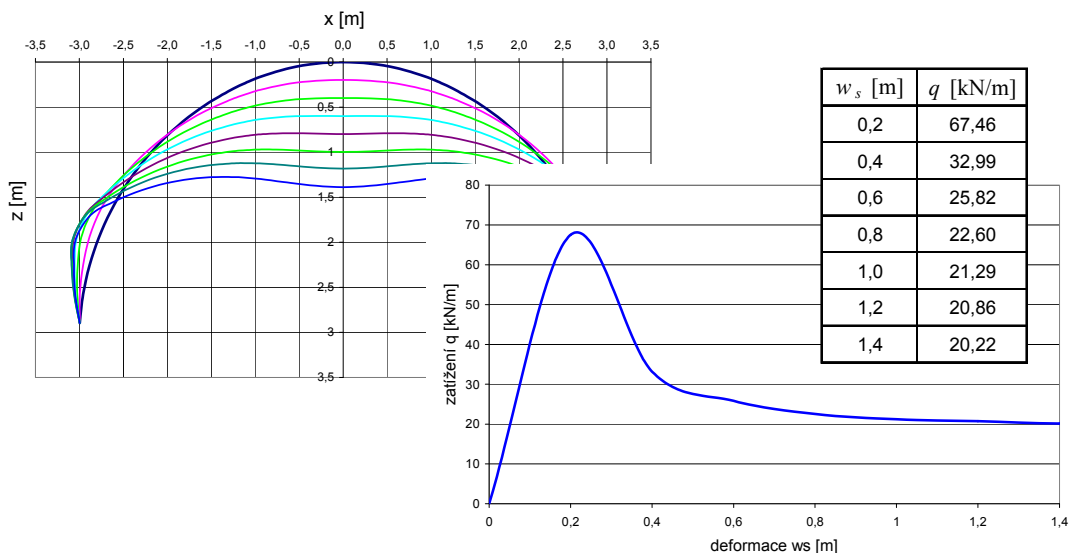


Obr. 5: Geometrie výztuže 00-0-16/P-28



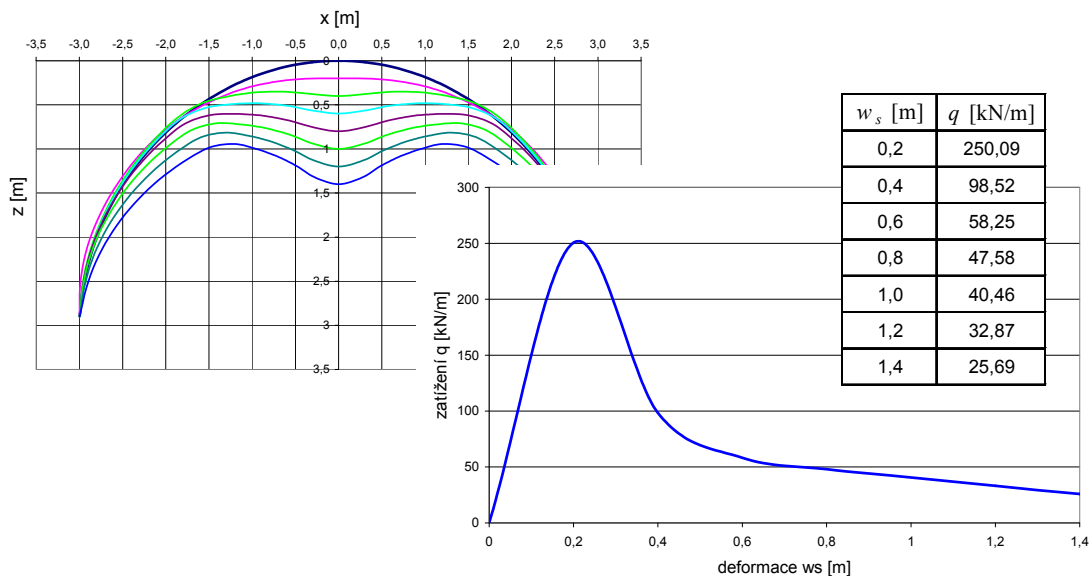
Obr. 6: Schéma zatížení výztuže a použitého profilu P-28

Nejprve byl výpočet proveden bez existence pasivních sil. Na obr. 7 je znázorněna postupná deformace výztuže a dále pak křivka závislosti zatížení q na vhodně zvolené deformaci (svislý posun vrcholu oblouku w_s). Hodnota zatížení q zde nepřekračuje 70 kN/m.



Obr. 7: Postupné zatěžování výztuže bez existence pasivních sil

V dalším kroku již byl výpočet proveden při existenci pasivních sil. Na obr. 8 lze sledovat chování výztuže při její deformaci. Při větších deformacích již nedochází ke spolupůsobení horniny s výztuží a výztuž se deformuje směrem „od horniny“. V této oblasti se s kyvnými pruty, které zastupují pasivní síly, již nepočítá v matici tuhosti $[K]$.



Obr. 8: Postupné zatěžování výztuže při existenci pasivních sil

K tomu, aby při existenci pasivních sil docházelo k velkým deformacím, je zapotřebí větších zatížení než bez jejich existence. Závislost velikosti zatížení q na svislém posunu vrcholu oblouku w_s je také znázorněna na obr. 8.

4 ZÁVĚR

Zpracovaný SW umožňuje přibližně určovat tzv. pracovní-deformační charakteristiku ocelové obloukové výztuže, tj. závislost mezi její deformací a zatížením při různém rozložení zatěžovacích sil. Počítá se přitom s geometrickou a fyzikální nelinearitou a s možnou interakcí horniny s výztuží. Uvedený příklad ukazuje, že únosnost stejné výztuže se pohybuje ve velmi širokých mezích ovlivněných zejména rozložením aktivních sil působících na výztuž a podmínkami, které se vytvoří pro interakci horniny s výztuží.

PODĚKOVÁNÍ

Projekt byl realizován za finanční podpory ze státních prostředků prostřednictvím Grantové agentury České republiky. Registrační číslo projektu je 105/08/1562.

LITERATURA

- [1] JANAS, P. *Spolehlivost ocelových výztuží dlouhých důlních děl při rázovém zatížení*. Závěrečná zpráva projektu GA ČR 105/04/0458. Ostrava, 2007.
- [2] KADLČÁK, J., KYTÝR, J. *Statika stavebních konstrukcí II*. Brno, 2001. ISBN 80-214-1648-3.
- [3] RANDÝSKOVÁ, L., JANAS, P. Numerické geometricky nelineární řešení soustavy kruhových oblouků pomocí obecné deformační metody. In *Modelování v mechanice 2010*, Ostrava 18. - 19. 5. 2010. Mezinárodní konference. Sborník příspěvků, Ostrava 2010, s. 59-61. ISBN 978-80-248-2234-1.
- [4] RANDÝSKOVÁ, L., JANAS, P. Geometricky a fyzikálně nelineární řešení ocelových oblouků. In *Structural and Physical Aspects of Civil Engineering 2010*, Štrbské Pleso 24. - 26. 11. 2010. Mezinárodní konference. Sborník příspěvků, Košice 2010, s. 1-8. ISBN 978-80-553-0527-1.
- [5] MARKOPOULOS, A., JANAS, P., PODEŠVA, J. Náhradní ohybová tuhost profilu TH-29. In *New Trends in Statics and Dynamics of Building 2010*, Bratislava 21. - 22. 10. 2010. Mezinárodní konference. Sborník příspěvků, Bratislava 2010, s. 101-102. ISBN 978-80-227-3373-1.

Oponentní posudek vypracoval:

Prof. Ing. Jiří Šejnoha, DrSc., ČVUT Praha, Thákurova 7, Praha 6.

Doc. Ing. Richard Šňupárek, CSc., Ústav geoniky AV ČR, Studentská 1768, Ostrava Poruba.